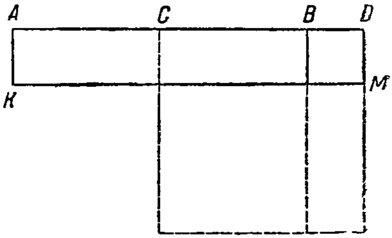
случае может опираться на геометрическую алгебру, развитую им во второй книге „Начал“; мы здесь же сформулируем шестую теорему этой книги, теорему, с которой мы вскоре снова встретимся (см. ниже), в следующем виде: если C — середина AB, а D точка на продолжении AB, то

$$AD \cdot BD = CD^2 - CB^2,$$

т. е. пользуясь данными выше обозначениями,

$$uv = z^2 - x^2.$$



Фгг. 1.

Если все линии представляют целые числа, то, чтобы $AB = 2CB$ (или $u - v = 2x$) могло быть четным, необходимо, чтобы $AD (= u)$ и $BD (= v)$ были оба либо четными числами, либо нечетными; с другой стороны, необходимым и достаточным условием того, чтобы гномон $AD \cdot BD$ был квадратным числом, является то, чтобы AD и BD представляли подобные числа, или на нашем алгебраическом языке, чтобы $AD = am^2$, $BD = an^2$; тогда

$$z = CD = a\,\frac{m^2 + n^2}{2}, \quad x = CB = a\,\frac{m^2 - n^2}{2}, \quad y = a \cdot mn.$$

Мы увидим, что такое представление чисел прямоугольниками и квадратами дало начало принципу геометрической алгебры, между тем как геометрическая арифметика пользовалась еще другими фигурами.

Мы сказали, что введение понятия о треугольных числах приписывалось пифагорейцам. Под треугольными числами понимают суммы первых последовательных чисел натурального числового ряда; при этом единицы каждого числа изображают в виде строк из точек, располагаемых друг под другом, так что они составляют треугольник.

Легко заметить, что этот способ представления мог дать начало настоящему исчислению: действительно, достаточно для этого построить, наряду с первым треугольником из точек, второй так, чтобы они составляли вместе параллелограм. Так как в каждой строке имеется одинаковое число точек ($n + 1$, если n означает число строк), то совокупность точек, параллелограма, т. е. удвоенное треугольное число, равно $n\,(n + 1)$; это, как мы видим, тот же метод, каким пользуются в алгебре, когда прибавляют к самой себе арифметическую прогрессию, взятую в обратном порядке.

Так как единица, являющаяся разностью этого ряда, может быть выбрана произвольно и так как *аддитивная* постоянная дает в каждом члене только произведение, которое должно быть прибавлено к сумме, то легко можно было получить сумму любой